

ZASADA PRACY WIRTUALNEJ

W rozdziale 1. omówiliśmy teorię stanu naprężenia. Wprowadziliśmy tam pojęcia sił powierzchniowych i masowych, tworzących obciążenie ciała. W dalszym ciągu zdefiniowaliśmy wektor i tensor naprężenia oraz wyprowadziliśmy równania różniczkowe równowagi łączące tensor naprężenia i wektor naprężenia lub siły powierzchniowe. Na podstawie równań równowagi momentów wykazaliśmy symetrię tensora naprężenia.

W rozdziale 2. omówiliśmy teorię stanu odkształcenia. Zdefiniowaliśmy w nim wektor przemieszczenia i tensor odkształcenia. Wyprowadziliśmy również związki geometryczne (kinematyczne) łączące wektor przemieszczenia z tensorem odkształcenia.

Na koniec dodajmy, że wprowadzenie opisanych wyżej pojęć dotyczących stanów naprężenia i odkształcenia było możliwe dzięki założeniu ciągłości materii tworzących badane ciała.

Obecnie pokażemy, że stany naprężenia i obciążeń oraz odkształcenia i przemieszczenia są związane pewną bardzo ogólną zasadą, niezależną od rodzaju materiału. Zasada ta ma podstawowe znaczenie w mechanice ciał sztywnych i ciał odkształcalnych. Wyjątkowa doniosłość zasady prac wirtualnych jest głównym powodem wydzielenia omawianej problematyki w osobnym rozdziale. Dalsze rozważania dotyczące szczegółów wyprowadzenia będą prowadzone z założeniem małych deformacji, tzn. przy akceptacji liniowych związków kinematycznych (geometrycznych) definiujących tensor odkształcenia *Cauchy'ego*.

Pośród dowolnych układów funkcji $\sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3)$ opisujących stan naprężenia można wyodrębnić takie, które spełniają równania różniczkowe równowagi we wnętrzu ciała ($\sigma_{ji,j} + G_i = 0$) oraz naprężeniowe warunki brzegowe na powierzchni ograniczającej ciało ($\sigma_{ji}n_j = p_i^{(n)}$). Układ naprężeń spełniający te wymagania nazywamy układem **statycznie dopuszczalnym**. Istotne jest to, że statycznie dopuszczalnych układów σ_{ij} jest nieskończenie wiele, gdyż do określenia sześciu funkcji

$\sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3)$ dysponujemy tylko trzema równaniami różniczkowymi równowagi wewnętrznej.

Pole odkształceń jest **kinematycznie dopuszczalne**, jeśli spełnia ono związki kinematyczne $\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2$, a przemieszczenia $u_i(x_1, x_2, x_3)$ spełniają kinematyczne warunki brzegowe.

Rozważmy obecnie ciało o objętości V ograniczone zamkniętą powierzchnią S . Obliczmy pracę określoną wyrażeniem:

$$(a) \quad I = \int_S \mathbf{p} \cdot \mathbf{u} \, dS + \int_V \mathbf{G} \cdot \mathbf{u} \, dV = \int_S p_i u_i \, dS + \int_V G_i u_i \, dV,$$

przy czym wielkości $\varepsilon_{ij}(x_1, x_2, x_3)$ oraz $u_i(x_1, x_2, x_3)$ tworzą **dowolny** układ kinematycznie dopuszczalny, a $\sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3)$ jest **dowolnym** statycznie dopuszczalnym polem naprężeń, będącym w równowadze z siłami powierzchniowymi $p_i(x_1, x_2, x_3)$ oraz masowymi $G_i(x_1, x_2, x_3)$.

Gęstość sił powierzchniowych p_i jest wektorem naprężenia na powierzchni ciała. Dla współrzędnych p_i obowiązują więc zależności (1.7):

$$(b) \quad p_i = \sigma_{ji} \cdot n_j,$$

gdzie n_j ($j = 1, 2, 3$) są kosinusami kierunkowymi normalnych do powierzchni S_0 . Pierwszą z całek występujących we wzorze (a) po wykorzystaniu (b) można zapisać w postaci:

$$(c) \quad \int_S p_i u_i \, dS = \int_S (\sigma_{ji} u_i) n_j \, dS = \int_S A_j n_j \, dS,$$

gdzie

$$(d) \quad A_j = \sigma_{ji} u_i$$

i oznacza współrzędne pewnego wektora, określonego na powierzchni ciała.

Wykorzystamy obecnie znany wzór *Greena-Gaussa-Ostrogradskiego* na zamianę całki powierzchniowej na objętościową:

$$(e) \quad \int_S A_j n_j dS = \int_V A_{j,j} dV,$$

skąd

$$(f) \quad \int_S (\sigma_{ji} u_i) n_j dS = \int_V (\sigma_{ji} u_i)_{,j} dV = \int_V (\sigma_{ji,j} u_i + \sigma_{ji} u_{i,j}) dV.$$

Uzyskany rezultat podstawimy do zależności (a):

$$(g) \quad I = \int_S p_i u_i dS + \int_V G_i u_i dV = \int_V [(\sigma_{ji,j} + G_i) u_i] dV + \int_V \sigma_{ji} u_{i,j} dV.$$

Wyrażenie w nawiasie $\sigma_{ji,j} + G_i$ na podstawie równań różniczkowych równowagi (1.9) jest równe zero.

Różna od zera pozostaje zatem tylko druga całka objętościowa. Przekształcimy ją następująco:

$$(h) \quad \int_V \sigma_{ji} u_{i,j} dV = \int_V \sigma_{ji} (\varepsilon_{ij} + \omega_{ij}) dV = \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV.$$

We wzorze (h) wykorzystaliśmy symetrię tensora naprężenia $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, rozkład gradientu przemieszczeń na tensor odkształcenia i tensor obrotu oraz fakt, że iloczyn tensora symetrycznego i skośnie symetrycznego jest równy zero, tzn. $\sigma_{ij} \omega_{ij} = 0$

Po podstawieniu wzoru (h) do zależności (a) otrzymujemy poszukiwane **równanie pracy wirtualnej**, stanowiące esencję zasady pracy wirtualnej:

$$\int_S p_i u_i dS + \int_V G_i u_i dV = \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV. \quad (3.1)$$

Równanie (3.1) jest bardzo ogólne, gdyż **między wielkościami statycznymi i kinematycznymi nie musi zachodzić żaden związek przyczynowy**. Od pól naprężeń i przemieszczeń wymagamy jedynie, by były odpowiednio statycznie i kinematycznie dopuszczalne. Przy wyborze tych pól mamy zatem bardzo dużo swobody. Zazwyczaj jest tak, że jedno z omawianych pól jest rzeczywiste, a drugie fikcyjne (wymyślone, uprzednio przygotowane), czyli **wirtualne**. Stąd właśnie pochodzi nazwa zasady.

Można przyjąć, że wielkości statyczne p_i , G_{ij} oraz σ_{ij} są wielkościami rzeczywistymi, a wielkości u_i oraz ε_{ij} tworzą pewien dowolnie obrany (wirtualny) układ kinematycznie dopuszczalny. Równanie (3.1) odnosi się wówczas do tzw. **wirtualnego stanu przemieszczeń** i jest pewną kombinacją równań równowagi służącą do wyznaczania rzeczywistych wielkości statycznych. Wówczas równanie pracy wirtualnej można zapisać w postaci:

$$\int_S p_i \bar{u}_i dS + \int_V G_i \bar{u}_i dV = \int_V \sigma_{ij} \bar{\varepsilon}_{ij} dV, \quad (3.2)$$

gdzie wielkości wirtualne zaznaczono nadkreśleniem.

Jeżeli z kolei wielkości kinematyczne u_i oraz ε_{ij} są rzeczywiste, a wielkości statyczne p_i , G_i oraz σ_{ij} tworzą pewien dowolnie przyjęty (wirtualny) układ statycznie dopuszczalny, to równanie (3.1) odnosi się do tzw. **wirtualnego stanu naprężeń** i służy zazwyczaj do obliczania rzeczywistych wielkości kinematycznych. Wtedy zasadę prac wirtualnych można zapisać następująco:

$$\int_S \bar{p}_i u_i dS + \int_V \bar{G}_i u_i dV = \int_V \bar{\sigma}_{ij} \varepsilon_{ij} dV. \quad (3.3)$$

Równanie (3.1) może, rzecz jasna, zawierać wyłącznie wielkości rzeczywiste, tzn. naprężenia, przemieszczenia i odkształcenia wywołane przez działanie sił powierzchniowych i masowych. Odpowiada to twierdzeniu *Clapeyrona*, które będzie przedstawione w rozdziale 6. W końcu oba pola kinematyczne i statyczne, mogą być wirtualne. Przydatność takiej postaci zasady pracy wirtualnej wydaje się jednak znikoma.

Podkreślić trzeba raz jeszcze, że postać równania (3.1) jest ważna dla ośrodka ciągłego uformowanego z dowolnego materiału, wykazującego małe odkształcenia i małe przemieszczenia. W przypadku dużych deformacji równanie pracy wirtualnej ma nieco inną postać, uwzględniającą inne miary odkształceń i naprężeń.

Zasada prac wirtualnych jest także słuszna, jeżeli zamiast wielkości skończonych wstawimy ich przyrosty lub prędkości, spełniające wymagania dopuszczalności. Na przykład w mechanice ciał plastycznych bardzo użyteczne jest **równanie mocy wirtualnej**, w którym występują rzeczywiste wielkości statyczne i wirtualne pola prędkości przemieszczeń \dot{u}_i oraz prędkości odkształceń $\dot{\varepsilon}_{ij}$:

$$\int_S p_i \dot{u}_i dS + \int_V G_i \dot{u}_i dV = \int_V \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} dV. \quad (3.4)$$

Dla układów ciał sztywnych, których odkształcenia są z założenia równe zeru, prawa strona równania (3.1) znika, co prowadzi do zależności:

$$\int_S p_i u_i dS + \int_V G_i u_i dV = 0 \quad (3.5)$$

lub

$$\sum_k P_k \Delta_k = 0. \quad (3.6)$$

Wzory (3.5) i (3.6) obowiązują jednak tylko dla bardzo małych przemieszczeń. Iloczyn P_k i Δ_k ma sens pewnej pracy (siła \times przemieszczenie liniowe lub moment \times kąt obrotu). Symbolem P_k oznaczono uogólnione siły wypadkowe, tzn. siły skupione lub momenty statyczne sił, a symbol Δ_k oznacza rzut wektora przemieszczenia liniowego (lub kąowego) na kierunek danego wektora wypadkowego P_k .

Bardziej ogólna jest postać, w której przemieszczenia są zastąpione prędkościami przemieszczeń. Wówczas przemieszczenia mogą być dowolnie duże. W tym przypadku

$$\int_{S_0} p_i \dot{u}_i dS_0 + \int_{V_0} G_i \dot{u}_i dV_0 = 0. \quad (3.7)$$

lub

$$\sum_k P_k \dot{\Delta}_k = 0. \quad (3.8)$$

Iloczyn P_k i $\dot{\Delta}_k$ ma teraz sens pewnej mocy (siła \times prędkość liniowa lub moment \times prędkość kąta obrotu). Symbol $\dot{\Delta}_k$ oznacza rzuty wektorów prędkości liniowych (lub kątowych) na kierunek linii działania siły P_k .

Zakres zastosowań zasady prac wirtualnych jest niezwykle duży. Przekonamy się o tym, studiując dalsze rozdziały.